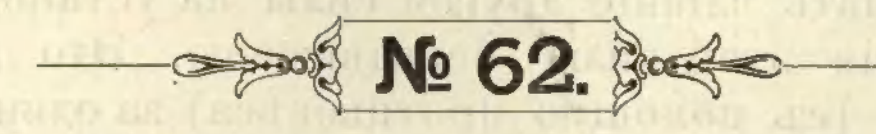
ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



VI Сем. 25 Января 1889 г. № 2.

ОСНОВНОЙ ЗАКОНЪ ЭЛЕКТРОМАГНИТИЗМА.

(Изъ лекцій).

Основной законъ электромагнитизма, т. е. законъ предполагаемаго дѣйствія элемента тока на полюсъ, выведенъ, какъ извѣстно, Лапласомъ изъ наблюденій Біо и Совара надъ дѣйствіемъ прямого тока на магнитную стрѣлку. Выводъ несомнѣнно вѣренъ, но недостаточно нагляденъ. Лѣтъ десять назадъ я сообщилъ въ одномъ изъ засѣданій Физическаго Общества, а затѣмъ и на лекціяхъ по электромагнитизму, другой способъ вывода, какъ мнѣ кажется, болѣе наглядный. Два прибора для этой цѣли (гальванометръ съ двумя кольцевыми проводниками, и однополюсная стрѣлка, въ родѣ той, какою пользовался проф. Петрушевскій при своихъ магнитныхъ наблюденіяхъ) приготовлены были въ механической мастерской Спб. Университета, по моей просьбѣ, по чертежамъ Вл. Вл. Лермантова. Хотя эти приборы въ числѣ многихъ другихъ, устроенныхъ по указаніямъ Вл. Вл. Лермантова, фигурировали на Парижской электрической выставкѣ 1881 г. (журн. „Электричество", 1882 г. стр. 58), но самые опыты и выводы изъ нихъ не были публикованы; описаніе ихъ появилось лишь въ небольшомъ числѣ экземпляровъ литографій моихъ лекцій въ 1882 г. Въ виду этого я рѣшился предложить ихъ для напечатанія. Ограничиваюсь только тѣмъ, что мнѣ казалось новымъ въ способѣ, именно опредѣленіемъ направленія силы элемента тока на полюсъ, и зависимости величины ея отъ разстоянія между ними. Способъ опредѣленія направленія силы мнѣ до сихъ поръ не встрѣчался въ печати; способъ же опредѣленія зависимости величины силы отъ разстоянія я нашелъ недавно въ видѣ повѣрки основного закона электромагнитизма въ „Lessons on practical physics by Balfour Stewart and Haldane Gee, 1887 (vol. II. p. 326).

I.

Направленіе силы элемента тока на магнитный полюсъ опредѣляется изъ наблюденій установки стрѣлки подъ вліяніемъ тока. Какъ извѣстно, прямой токъ достаточной силы устанавливаетъ подвѣшенную стрѣлку перпендикулярно къ своему направленію. Этотъ фактъ несомнѣнно показываетъ, что силы тока на полюсы стрѣлки дѣйствуютъ въ плоскости, перпендикулярной къ направленію прямого тока. Но какъ направлены

силы въ этой плоскости, вдоль ли прямыхъ, соединяющихъ полюсы съ токомъ, или подъ угломъ къ этимъ прямымъ, непосредственно изъ наблюденій не видно, такъ какъ стрѣлка устанавливается перпендикулярно къ проводнику подъ вліяніемъ двухъ силъ, приложенныхъ къ ея полюсамъ, и каждая изъ нихъ измѣняетъ установку стрѣлки подъ вліяніемъ другой силы. Для опредѣленія направленія силы, дѣйствующей на отдѣльный полюсъ, нужно устранить вліяніе другой силы на установку стрѣлки, сдѣлавъ точку приложенія этой силы неподвижною. Это достигается подвѣшиваніемъ стрѣлки (съ помощію противовѣса) за одинъ изъ полюсовъ (фиг. 7). Такъ какъ свободный магнитизмъ стрѣлки, а слѣдовательно, и полюсы ея распредѣлены на нѣкоторомъ разстояніи отъ концовъ ея, то эти концы отгибаютъ внизъ, чтобы каждый изъ полюсовъ находился на опредѣленной вертикальной линіи. На такую стрѣлку дѣйствуютъ вертикальнымъ прямымъ токомъ. Обѣ силы, производимыя имъ на полюсы стрѣлки, направлены въ горизонтальной плоскости и стремятся сдвинуть эти полюсы по своему направленію. Дѣйствіе силы на подвѣшенный полюсъ уничтожается противодѣйствіемъ тяжести: вѣсъ стрѣлки съ противовѣсомъ не позволяетъ этому полюсу отклониться въ какую бы то ни было сторону. Поэтому стрѣлка, вращаясь около этого полюса въ горизонтальной плоскости только подъ вліяніемъ другой силы, дѣйствующей на второй полюсъ, должна устанавливаться по направленію этой силы и притомъ такъ, чтобы сила тянула полюсъ отъ оси вращенія стрѣлки.

Фиг. 7.

Наблюденія показываютъ, что стрѣлка устанавливается перпендикулярно къ вертикальной плоскости, проходящей черезъ токъ и загнутый конецъ стрѣлки; особенно точно принимаетъ она это направленіе при сильномъ токѣ, и когда ей приходится при этомъ отклоняться отъ магнитнаго меридіана. Значитъ, сила (F), дѣйствуюшая на свободный полюсъ, дѣйствительно направлена перпендикулярно къ плоскости (P), проходящей черезъ токъ (O) и полюсъ (N); и притомъ, какъ показываетъ болѣе подробное разсмотрѣніе условій установки стрѣлки, сила на южный полюсъ направлена въ правую, на сѣверный—въ лѣвую сторону зрителя, плывущаго по направленію тока головою впередъ.

II.

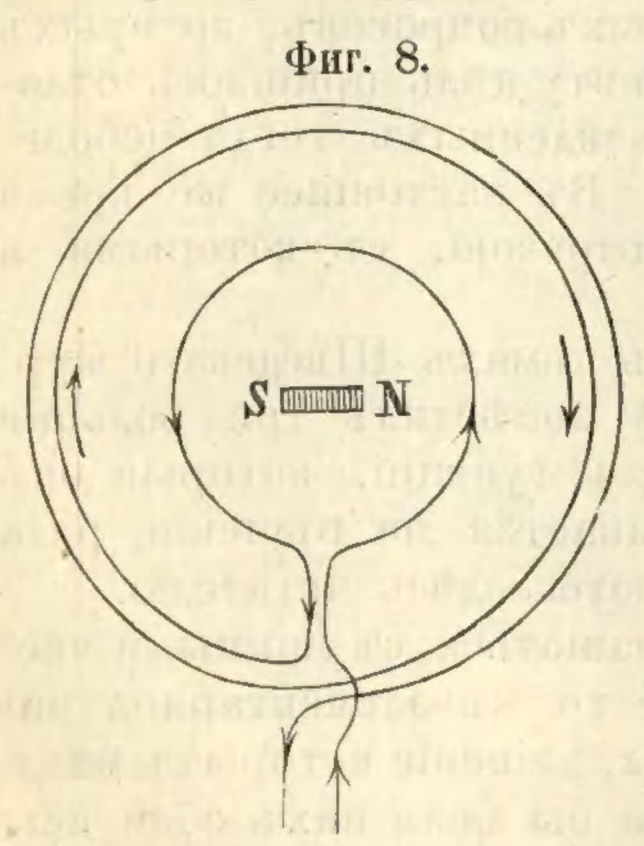
Зависимость электромагнитной силы элементовъ отъ ихъ числа или длины опредѣляется нагляднѣе и точнѣе всего по дѣйствію кольца на маленькій магнитъ въ центрѣ, такъ какъ элементы окружности занимаютъ одинаковое положеніе относительно центра (т. е. всѣ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ него и пересѣкаютъ радіусы подъ равными прямыми углами). Наблюденія показываютъ, что электромагнитныя силы, производимыя кольцевыми токами на полюсы въ центрѣ (т. е. тангенсъ угла отклоненія стрѣлки изъ меридіана) прямо пропорціональны числу оборотовъ проводника по окружности кольца, при той же общей длинѣ

всей цѣпи. Значитъ, эти силы пропорціональны числу равныхъ элементовъ или длинѣ неравныхъ при прочихъ равныхъ условіяхъ. На первый взглядъ это не зачѣмъ и доказывать экспериментальнымъ путемъ; — очевидно—равные элементы, при равныхъ условіяхъ, производятъ равныя дѣйствія, и равнодѣйствующая равна суммѣ ихъ дѣйствій. На самомъ же дѣлѣ это доказательство имѣетъ значеніе; безъ него мы не можемъ быть увѣрены въ примѣнимости закона независимости дѣйствія силъ въ данномъ родѣ явленій. Дѣйствіе элементовъ передается полюсу какою либо промежуточною средою; каждый вновь присоединяемый элементъ тока находитъ среду уже видоизмѣненную дѣйствіемъ остальныхъ элементовъ, и значитъ дѣйствуетъ на полюсъ при иныхъ условіяхъ. Поэтому a priori вовсе не слѣдуетъ, чтобы дѣйствіе элемента на полюсъ было одинаково, какъ въ отсутствіи дѣйствій другихъ элементовъ, такъ и въ присутствіи ихъ, и значитъ безъ экспериментальной повѣрки мы не могли бы примѣнить въ даннаго рода явленіяхъ закона независимости дѣйствія одной силы отъ одновременнаго дѣйствія другихъ силъ. Фактическая пропорціональность общей электромагнитной силы числу элементовъ тока доказываетъ примѣнимость этого закона.

III.

Зависимость электромагнитной силы элемента тока отъ разстояній можно опредѣлить тѣми же кольцевыми токами, на основаніи только что доказаннаго свойства ихъ—пропорціональности электромагнитной силы кольца числу элементовъ въ немъ при прочихъ равныхъ условіяхъ. Для этого дѣйствуютъ на очень маленькую стрѣлку токомъ, пропущеннымъ послѣдовательно черезъ два концентрическія кольца въ противоположныхъ направленіяхъ (фиг. 8); одно кольцо съ радіусомъ въ n разъ большимъ радіуса другаго.

Фиг. 8.



Элементы большаго кольца дѣйствуютъ на стрѣлку въ центрѣ съ разстоянія въ n разъ большаго, чѣмъ элементы меньшаго кольца, и потому дѣйствуютъ слабѣе; но можно приравнять противоположныя дѣйствія обоихъ колецъ на стрѣлку увеличеніемъ числа оборотовъ проводника на большемъ кольцѣ. Наблюденія показываютъ, что стрѣлка остается въ покоѣ, т. е. дѣйствія обоихъ колецъ взаимно уравновѣшиваются, когда на кольцо съ n разъ большимъ радіусомъ навернуто въ n разъ большее число оборотовъ проводника, чѣмъ на кольцо съ единичнымъ радіусомъ. Такъ какъ каждый оборотъ проводника на большемъ кольцѣ въ n разъ длиннѣе одного оборота на маломъ, то всѣ n оборотовъ въ n^2 разъ длиннѣе его. Слѣдовательно, электромагнитная сила каждаго элемента проводника на маломъ кольцѣ уравновѣшивается силою n^2 такихъ же элементовъ, дѣйствующихъ съ разстоянія въ n разъ большаго, и значитъ, сила каждаго элемента большаго кольца

уменьшилась въ n^2 разъ, вслѣдствіе увеличенія разстоянія въ n разъ. Отсюда законъ: *величина электромагнитной силы элемента тока измѣняется обратно пропорціонально квадратамъ разстояній элемента отъ полюса*. Въ моемъ приборѣ $n=2$; радіусъ меньшаго кольца=10 цм., большаго=20 цм. Приборъ оказался на столько чувствительнымъ, что при 2-хъ элементахъ измѣненіе длины большаго проводника менѣе чѣмъ на 1 цм. замѣтно вліяетъ на стрѣлку.

Остальные законы выводятся общепринятымъ способомъ: пропорціональность силы синусу угла между элементомъ и радіусомъ векторомъ—посредствомъ такъ называемаго синусоидальнаго проводника, пропорціональность электромагнитной силы, силѣ тока—посредствомъ прерывателя Пуле. Проф. *П. Фанъ-деръ-Флитъ* (Спб.).

Однозначное преобразованіе фигуръ при помощи мнимыхъ чиселъ.

Тема для сотрудниковъ.

Въ высшей математикѣ часто встрѣчаются вопросы элементарнаго характера, которые могутъ быть рѣшены при помощи элементарной алгебры и геометріи. Эти вопросы иногда являются частными случаями болѣе общихъ теоремъ, и въ такомъ случаѣ они нуждаются въ самостоятельномъ рѣшеніи. Но часто элементарные вопросы являются однимъ изъ звеньевъ въ процессѣ рѣшенія болѣе трудныхъ вопросовъ; въ такомъ случаѣ рѣшеніе конечныхъ вопросовъ вполнѣ зависитъ отъ правильной постановки и надлежащаго рѣшенія элементарныхъ вопросовъ. Затѣвая пять лѣтъ тому назадъ изданіе журнала „Элементарной Математики", я имѣлъ въ виду рѣшеніе подобныхъ элементарныхъ вопросовъ, которыхъ не мало накопилось въ высшей математикѣ. Но эту цѣль пришлось отложить на неопредѣленное время, въ силу предъявленныхъ тогда небольшихъ требованій къ элементарному журналу. Въ настоящее же время появилось много читателей съ солидною подготовкою, съ которыми я могу подѣлиться своими знаніями.

Французскій ученый Poincaré въ первыхъ томахъ Шведскаго журнала „Acta Mathematica" (1882 и 83-ій годы) помѣстилъ три большіе мемуара, посвященные имъ изслѣдованію новыхъ функцій, которыя онъ назвалъ Фуксовыми. Это изслѣдованіе основывается на рѣшеніи ряда элементарныхъ вопросовъ, которые и предлагаются здѣсь читателю.

Въ высшей математикѣ мы привыкли обращаться съ мнимыми числами, какъ съ чѣмъ то вполнѣ реальнымъ. Не то въ элементарной математикѣ: здѣсь трудно подыскать такіе вопросы, рѣшеніе которыхъ вполнѣ зависѣло бы отъ мнимыхъ чиселъ и не могло бы безъ нихъ обойтись. Вотъ почему предложенные здѣсь вопросы заслуживаютъ особеннаго вниманія, не только по своему содержанію, но и по способу рѣшенія, основанному на мнимыхъ числахъ.

Но прежде всего необходимо дать нѣсколько теоремъ изъ теоріи мнимыхъ чиселъ.

1. Мнимое число на плоскости можетъ быть выражено точкою. Для этой цѣли принимаемъ какую нибудь точку O за *начало* и прямую OX за *дѣйствительную ось*. Для изображенія мнимаго числа $A=m+n\sqrt{-1}$ на плоскости поступаемъ слѣдующимъ образомъ: на дѣйствительной оси отложимъ отрѣзокъ OM, равный по длинѣ m, изъ точки M возставляемъ перпендикуляръ MA, равный по длинѣ n; точка A, или векторъ OA, выражаетъ наше мнимое число*).

Такимъ образомъ одна и та же буква A выражаетъ и точку на плоскости, и мнимое число. Чтобы не смѣшать съ произведеніемъ AB двухъ мнимыхъ величинъ, разстояніе двухъ точекъ на плоскости изображается съ чертою сверху: $\overline{AB}$.

2. Мнимое число можетъ быть выражено въ формѣ:

$$A=r(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ r, называемое модулемъ, есть длина $\overline{OA}$, а φ есть уголъ OA съ дѣйствительною осью.

3. Отношеніе двухъ мнимыхъ чиселъ можетъ быть представлено въ формѣ:

$$\frac{B}{A}=r(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ $r=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ и уголъ φ есть уголъ, на который нужно поворотить OA до совпаденія OB.

Положительное вращеніе считается противоположно движенію часовой стрѣлки.

4. Если A, B и C три мнимыя числа, то

$$\frac{C-A}{B-A}=r(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ $r=\overline{CA}:\overline{BA}$ и уголъ φ есть тотъ уголъ, на который нужно поворотить BA до совпаденія съ CA.

5. Теорема изъ элементарной геометріи: на хордѣ AB построимъ какой нибудь сегментъ и на его окружности возьмемъ точку Z; отношеніе $\overline{ZA}:\overline{ZB}$ возрастаетъ если Z удаляется отъ A, т. е. если дуга ZA возрастаетъ.

6. Если A, B, C и D находятся на одной окружности, то, подразумѣвая подъ этими буквами соотвѣтственныя мнимыя числа, имѣемъ:

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=m,$$

гдѣ m есть нѣкоторое дѣйствительное число. Если m отрицательное число, то точки B и D находятся съ разныхъ сторонъ хорды AC. Если m положительное число, то точки B и D находятся съ одной стороны хорды AC; если при этомъ $m>1$, то дуга BC больше дуги DC.

*) В. П. Ермаковъ. Теорія векторовъ на плоскости. Кіевъ. 1887.

7. Если A, B, C и D расположены какъ нибудь на плоскости, то

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=r(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ φ есть уголъ, подъ которымъ пересѣкаются двѣ окружности, проходящія черезъ точки A и B, при чемъ одна изъ этихъ окружностей проходитъ еще чрезъ точку D, другая чрезъ точку C.

8. Теорема изъ элементарной геометріи: геометрическое мѣсто точки, отношеніе разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ сохраняетъ постоянную величину, есть окружность, пересѣкающая подъ прямымъ угломъ всѣ окружности, проходящія черезъ двѣ данныя точки.

9. Пусть A, B, C три постоянныя точки и Z перемѣнная точка и φ перемѣнный уголъ; положимъ

$$\frac{Z-B}{Z-A}=\frac{C-B}{C-A}(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi\sqrt{-1}).$$

Съ измѣненіемъ угла φ точка Z перемѣщается по окружности, проходящей черезъ точку C и пересѣкающей подъ прямымъ угломъ всякую окружность, проведенную чрезъ точки A и B. Это доказывается на основаніи предъидущей теоремы.

Послѣ этихъ предварительныхъ теоремъ перейдемъ къ нашей главной цѣли. Пусть a, b, c и d постоянныя дѣйствительныя или мнимыя числа, Z и Z′ перемѣнныя числа; положимъ

$$Z'=\frac{aZ+b}{cZ+d}\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, . \qquad (1)$$

Подставляя Z_1, Z_2, Z_3,..... вмѣсто Z, мы получимъ для Z′ соотвѣтствующія величины: Z'_1, Z'_2, Z'_3,..... Такимъ образомъ рядъ точекъ Z_1, Z_2, Z_3,..... мы переобразуемъ въ новый рядъ точекъ Z'_1, Z'_2, Z'_3........, т. е. одну фигуру можемъ преобразовать въ другую, при чемъ каждой точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ только одна точка другой фигуры и обратно. Вращеніе, подобіе и обратныя фигуры суть частные случаи этого преобразованія. Такое преобразованіе обладаетъ многими замѣчательными особенностями, что и нужно доказать.

10. Преобразованіе (1) превращаетъ круги въ круги. Если Z′, Z'_1, Z'_2 и Z'_3 соотвѣтствуютъ Z, Z_1, Z_2 и Z_3, то

$$\frac{Z'_2-Z'_1}{Z'_2-Z'}:\frac{Z'_3-Z'_1}{Z'_3-Z'}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2-Z}:\frac{Z_3-Z'_1}{Z_3-Z}.$$

Теорема доказывается на основаніи этого тождества и теоремы § 6.

11. Уголъ между преобразованными кругами равенъ углу между данными кругами. Доказывается это на основаніи послѣдняго тождества и теоремы § 7.

Положимъ теперь, что коэффиціенты a, b, c и d суть *дѣйствительныя числа*. Въ такомъ случаѣ преобразованіе (1) обладаетъ дальнѣйшими свойствами.

12. Если $ad-bc$ есть число положительное, то точки Z и Z′ находятся съ одной стороны дѣйствительной оси; въ противномъ случаѣ онѣ расположены по обѣ стороны оси.

13. Преобразованіе (1) переводитъ точку Z въ положеніе Z′, эту послѣднюю въ положеніе Z″ и т. д. Вообще преобразованіе (1) повторенное нѣсколько разъ, даетъ рядъ чиселъ: Z, Z′, Z″,......$Z^{(n)}$,......, такъ что

$$Z^{(n+1)}=\frac{aZ^{(n)}+b}{cZ^{(n)}+d}.$$

Всѣ точки Z, Z′, Z″, Z‴,..... находятся на одной окружности. Для этой цѣли нужно доказать тождество:

$$\frac{Z''-Z}{Z''-Z'''}:\frac{Z'-Z}{Z'-Z'''}=\frac{(a+d)^2}{ad-bc},$$

которое совмѣстно съ § 6 доказываетъ нашу теорему. Послѣднее тождество можетъ быть представлено и въ иной формѣ.

Кругъ, на которомъ находятся послѣдовательныя точки Z, Z′, Z″, Z‴,......, назовемъ *вращательнымъ кругомъ*, такъ какъ преобразованіе (1) равносильно вращенію этого круга около его центра. Положеніе вращательнаго круга зависитъ какъ отъ чиселъ a, b, c, d, такъ и отъ начальной точки Z. Разсмотримъ подробнѣе, какъ опредѣляется положеніе этого круга.

Точка, неизмѣняемая преобразованіемъ (1), называется *двойною точкою*.

Двойныхъ точекъ двѣ: онѣ суть корни уравненія:

$$Z=\frac{aZ+b}{cZ+d}.$$

Двойныя точки могутъ быть: дѣйствительныя, равныя и мнимыя. Сообразно этимъ случаямъ преобразованіе (1) называется *гиперболическимъ, параболическимъ* и *эллиптическимъ*.

14. Гиперболическое преобразованіе можетъ быть приведено къ формѣ:

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=K\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}, \qquad (2)$$

гда α и β дѣйствительныя двойныя точки, K также дѣйствительное число. Въ этомъ случаѣ вращательный кругъ проходитъ (§ 6) чрезъ двойныя точки α и β. Если K положительное число большее единицы, то преобразованіе (2) удаляетъ точку Z отъ α, т. е. дуга $Z'\alpha$ болѣе дуги $Z\alpha$.

15. Параболическое преобразованіе приводится къ формѣ:

$$\frac{1}{Z'-\alpha}=\frac{1}{Z-\alpha}+h, \qquad (3)$$

гдѣ α и h нѣкоторыя дѣйствительныя числа.

Если Z, Z', Z'',... суть послѣдовательныя точки, то

$$\frac{Z''-Z'}{Z''-\alpha}:\frac{Z-Z'}{Z-\alpha}=-1.$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 6), что вращательный кругъ проходитъ чрезъ двойную точку α.

Вращательный кругъ касается оси въ двойной точкѣ.

Если h положительное число, то преобразованіе (3) передвигаетъ точку Z на окружности вращательнаго круга по направленію движенія часовой стрѣлки.

16. Эллиптическое преобразованіе приводится къ формѣ:

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}(\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\sqrt{-1}), \qquad (4)$$

гдѣ α и β суть сопряженныя мнимыя двойныя точки. Отсюда слѣдуетъ (§ 9), что вращательный кругъ пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ круги, проходящіе чрезъ двойныя точки α и β.

17. Эллиптическое преобразованіе (4) превращаетъ кругъ, проходящій чрезъ двойныя точки α, β (§ 7), въ другой кругъ, проходящій чрезъ тѣ же точки и наклоненный къ прежнему подъ угломъ φ.

18. Если въ эллиптической подстановкѣ (4) уголъ φ есть число соизмѣримое съ π, то рядъ: Z, Z', Z'', Z''',.... состоитъ изъ періодически повторяющихся чиселъ.

19. Если въ эллиптической подстановкѣ (4) уголъ φ есть число несоизмѣримое съ π, то въ ряду точекъ: Z, Z', Z'', Z''',...... можно найти точку, какъ угодно близкую къ начальной точкѣ Z.

20. Съ измѣненіемъ положенія начальной точки Z центръ вращательнаго круга перемѣщается по прямой, перпендикулярной къ дѣйствительной оси.

Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

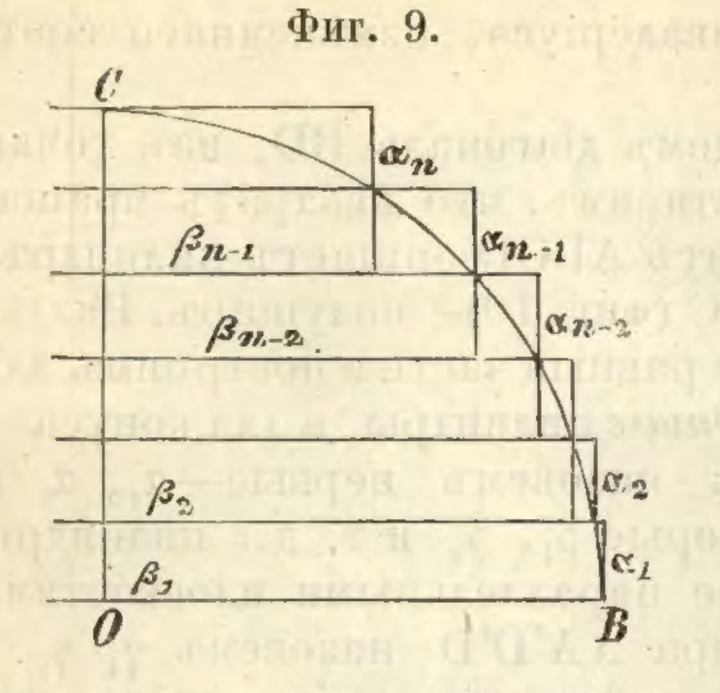
ОБЪЕМЪ ШАРА

способъ Кавалеріуса.

Прежде изложенія способа Кавалеріуса докажемъ, что шаръ есть предѣлъ цилиндровъ извѣстнымъ образомъ расположенныхъ.

Разсмотримъ полушаръ АСВ. (фиг. 9). Проведемъ радіусъ ОС перпендикулярно къ большому кругу АОВ. Раздѣлимъ этотъ радіусъ на n равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведемъ плоскости параллельныя большому кругу АОВ. Построимъ затѣмъ рядъ цилиндровъ, принимая за *нижнія* основанія круги сѣченія нашихъ плоскостей съ шаромъ; основаніе нижняго цилиндра будетъ кругъ АОВ; назовемъ эти цилиндры α_1, α_2,...α_n. Они будутъ своими краями выступать изъ шара, назовемъ ихъ

Фиг. 9.



выходящими. Принявъ круги сѣченія нашихъ параллельныхъ плоскостей съ шаромъ за верхнія *основанія*, построимъ новый рядъ цилиндровъ $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, числомъ ихъ будетъ на одинъ меньше; назовемъ эти цилиндры—внутренними.

Изъ построенія видно что

$$\alpha_n = \beta_{n-1},\ \alpha_{n-1} = \beta_{n-2} \text{ и т. д. } \alpha_4 = \beta_3,\ \alpha_3 = \beta_2,\ \alpha_2 = \beta_1.$$

Возьмемъ теперь разность между суммой всѣхъ выходящихъ и суммой всѣхъ внутреннихъ цилиндровъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$
$$-\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_{n-2} - \beta_{n-1}.$$

На основаніи вышеизложенныхъ равенствъ эта разность равна α_1. Означивъ первую сумму для краткости $\Sigma\alpha$, а вторую—$\Sigma\beta$, получимъ

$$\Sigma\alpha - \Sigma\beta = \alpha_1 = \pi r^2 \frac{r}{n} \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ r есть радіусъ шара.

Означивъ объемъ полушара чрезъ Ω, имѣемъ:

$$\Sigma\alpha > \Omega > \Sigma\beta.$$

Подставляя въ (1) величину Ω на мѣсто $\Sigma\alpha$ и $\Sigma\beta$, найдемъ;

$$\Omega - \Sigma\beta < \frac{\pi r^3}{n} \text{ и } \Sigma\alpha - \Omega < \frac{\pi r^3}{n}$$

Предположимъ теперь, что число n, на которое мы дѣлимъ радіусъ ОС и въ зависимости отъ него число цилиндровъ α и β безпредѣльно возрастаетъ, тогда объемъ

$$\alpha_1 = \frac{\pi r^3}{n}$$

можетъ быть сдѣланъ меньше всякой данной величины; другими словами можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины разность между Ω и $\Sigma\alpha$ и $\Sigma\beta$.

Слѣд. полушаръ есть предѣлъ, къ которому стремится сумма выходящихъ или внутреннихъ цилиндровъ, при безграничномъ увеличеніи ихъ числа.

Если мы имѣемъ прямой круговой конусъ, то, раздѣливъ его высоту на равныя части и проведя чрезъ точки дѣленія плоскости параллельныя основанію, найдемъ, при построеніи указаннымъ образомъ выходящихъ и внутреннихъ цилиндровъ, что конусъ будетъ также предѣломъ ихъ суммъ при безграничномъ увеличеніи ихъ числа.

Переходимъ къ изложенію способа Кавалеріуса, измѣненнаго соотвѣтственно вышесказанному*).

Разсмотримъ квадратъ ABCD, проведемъ діагональ BD, изъ точки B радіусомъ AB опишемъ дугу AC и представимъ, что квадратъ вращается около BC, какъ около оси. Тогда квадратъ ABCD опишетъ цилиндръ, треугольникъ BDC—конусъ, а квадрантъ ABC (фиг. 10)—полушаръ. Раздѣлимъ BC на равныя части и построимъ для шара *выходящіе* цилиндры, а для конуса—внутренніе; назовемъ первые—α_1, α_2 и т. д., а вторые β_1, β_2 и т. д.; цилиндры вырѣзанные параллельными плоскостями изъ цилиндра AA'D'D назовемъ γ_1 γ_2 и т. д. Легко найти уравненіе, связывающее соотвѣтственные α, β и γ. Пусть EF есть сѣченіе одной изъ параллельныхъ плоскостей съ образующимъ квадратомъ, H и N—точки пресѣченія EF съ дугою AC и діагональю BD, r—сторона квадрата.

Фиг. 10.

Тогда $$\gamma=\pi r^2\frac{r}{n},\quad \alpha=\pi\overline{HF}^2\frac{r}{n},\quad \beta=\pi\overline{NF}^2\frac{r}{n}.$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi r}{n}\left(\overline{HF}^2+\overline{NF}^2\right);$$

но NF=BF, слѣдовательно

$$\overline{HF}^2+\overline{NF}^2=\overline{HF}^2+\overline{BF}^2=\overline{BH}^2=r^2$$

и потому $$\alpha+\beta=\frac{\pi r^3}{n}=\gamma.$$

Такъ какъ эта зависимость справедлива для всѣхъ соотвѣтственныхъ элементовъ, то она справедлива и для суммъ этихъ элементовъ.

$$\Sigma\alpha+\Sigma\beta=\Sigma\gamma.$$

Замѣтивъ, что $\Sigma\gamma$ есть цилиндръ AA'D'D, имѣемъ:

$$\Sigma\alpha+\Sigma\beta=\pi r^3.$$

Если сумма двухъ перемѣнныхъ величинъ равна постоянной величинѣ, то сумма предѣловъ ихъ равна той же постоянной величинѣ, т. е. объемъ полушара+объемъ конуса$=\pi r^3$,

$$\Omega+\frac{\pi r^3}{3}=\pi r^3;\quad \Omega=\frac{2}{3}\pi r^3.$$

А объемъ шара $$=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

А. Шанъ-Гирей (Спб.) и *Г. Флоринскій* (Кіевъ).

---

*) Кавалеріусъ (1598—1647), творецъ „метода недѣлимыхъ" въ геометріи, вмѣсто безк. тонкихъ цилиндровъ разсматривалъ здѣсь круги, на сумму которыхъ онъ разбивалъ мысленно объемы тѣлъ вращенія. *Прим. ред.*

РАЦІОНАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

Прямоугольные треугольники, стороны которыхъ выражаются цѣлыми числами, называются раціональными или пиѳагоровыми.

Означимъ чрезъ a гипотенузу, чрезъ b и c — катеты прямоуг. тре угольника. Выраженіе

$$c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

показываетъ, что c^2 должно быть произведеніемъ двухъ неравныхъ множителей $a+b$ и $a-b$. Если положимъ $a+b=m$ и $a-b=n$, то получимъ:

$$a=\frac{m+n}{2} \quad \text{и} \quad b=\frac{m-n}{2}; \qquad (1)$$

откуда видно, что для того чтобы a и b были цѣлыми числами, сумма и разность обоихъ множителей c^2 должна дѣлиться на 2. Изъ этого слѣдуетъ, что для всякаго цѣлаго катета c можно найти столько раціональныхъ треугольниковъ, сколькими различными способами возможно разложить c^2 на два неравные производителя m и n, сумма и разность которыхъ дѣлится на 2.

Если c нечетное число, то производители c^2, т. е. m и n, будутъ нечетные, а сумма ихъ и разность, $m+n$ и $m-n$, — четные; поэтому можно найти столько раціональныхъ треугольниковъ, сколькими способами возможно разложить c^2 на два неравные множителя m и n.

Означимъ чрезъ α, β, γ..... простые множители c, входящіе въ c соотвѣтственно p, q, r..... разъ, то $c=\alpha^p\beta^q\gamma^r$ ...... и $c^2=\alpha^{2p}\beta^{2q}\gamma^{2r}$....... По извѣстному изъ ариѳметики правилу, составимъ всѣхъ дѣлителей c^2 и возьмемъ послѣдовательно для n каждый изъ нихъ, меньшій c, при чемъ $m=\frac{c^2}{n}$. По формуламъ (I) вычислимъ для всякаго нечетнаго c всѣ значенія a и b.

Число всѣхъ дѣлителей c^2 есть, какъ извѣстно, $(2p+1)(2q+1)(2r+1)$....., нечетное число, и одинъ изъ этихъ дѣлителей равенъ c. Число дѣлителей меньшихъ c всегда равно числу дѣлителей большихъ c, потому что если d есть дѣлитель c^2, напр. меньшій c, то $\frac{c^2}{d}$ будетъ необходимо тоже дѣлителемъ c^2, большимъ c. Такимъ образомъ число N всѣхъ дѣлителей c^2 меньшихъ c, есть:

$$N=\{(2p+1)(2q+1)(2r+1)\ldots\ldots\ldots-1\}:2; \qquad (II)$$

это число равно числу раціональныхъ треугольниковъ.

Одно изъ возможныхъ разложеній c^2 на два множителя есть $n=1$ и $m=c^2$; оно даетъ рѣшеніе

$$a=\frac{c^2+1}{2} \quad \text{и} \quad b=\frac{c^2-1}{2}, \qquad (III)$$

приписываемое Пиѳагору.

Когда c есть простое число, то рѣшеніе (III) есть единственно возможное. Слѣдовательно въ случаѣ c нечетнаго, только при c простомъ получается одинъ раціональный теугольникъ.

Если c четное число, то c^2 дѣлится на 4, и каждый изъ двухъ множителей m и n долженъ дѣлиться на 2, потому что въ противномъ случаѣ, т. е. если одинъ изъ этихъ множителей на 2 не дѣлится, изъ (I) видно, что a и b не будутъ цѣлыми числами. Полагая $m=2m_1$ и $n=2n_1$, слѣдовательно $c^2=2m_1.2n_1$ или $\frac{c^2}{4}=m_1n_1$, получимъ изъ (1) выраженія:

$$a=m_1+n_1 \text{ и } b=m_1-n_1. \qquad \text{(IV)}.$$

Изъ сказаннаго видно, что при c четномъ должно составить всѣхъ дѣлителей $\frac{c^2}{4}$ и взять послѣдовательно для n_1 каждый изъ нихъ, меньшій $\frac{c}{2}$, при чемъ $m_1=\frac{c^2}{4n_1}$. По формуламъ (IV) найдутся всѣ значенія a и b. Число раціональныхъ треугольниковъ опять опредѣлится по формулѣ (II), въ которой p, q, r.... будутъ показателями степеней простыхъ производителей $\frac{c^2}{4}$. Одно изъ возможныхъ разложеній $\frac{c^2}{4}$ на два множителя есть $n_1=1$ и $m_1=\frac{c^2}{4}$; оно даетъ по (IV) рѣшеніе:

$$a=\left(\frac{c}{2}\right)^2+1 \text{ и } b=\left(\frac{c}{2}\right)^2-1, \qquad \text{(V)}$$

приписываемое Платону.

Когда c есть двойное простое число, то рѣшеніе (V) есть единственно возможное и слѣдовательно, въ случаѣ c четнаго, только при c, равномъ двойному простому числу, получается одинъ раціональный треугольникъ.

Примѣръ 1. $c=7$. По формулѣ (II) имѣемъ $N=1$, т. е. одинъ раціональный треугольникъ. Дѣлители c^2, меньшіе c, только 1; полагая $n=1$ и слѣдовательно $m=49$, по фор. (I) получимъ: $a=25$ и $b=24$

Примѣръ 2. $c=55$; $c^2=5^2.11^2$. По фор. (II) имѣемъ $N=4$, т. е. четыре раціональные треугольника. Дѣлители c^2 меньшіе c, суть 1, 5, 25 и 11; полагая послѣдовательно $n=1$, 5, 25 и 11 и слѣдовательно соотвѣтственно $m=3025$, 605, 121 и 275, по форм. (I) получимъ: $a=1513$ и $b=1512$; $a=305$ и $b=300$; $a=73$ и $b=48$; $a=143$ и $b=132$.

Примѣръ 3. $c=26$; $\frac{c^2}{4}=13^2$. По фор. (II) имѣемъ $N=1$, т. е. одинъ раціональный треугольникъ. Дѣлители $\frac{c^2}{4}$, меньшіе $\frac{c}{2}$, только 1; полагая $n_1=1$; и слѣдовательно $m_1=169$, по фор. (IV) получимъ: $a=170$ и $b=168$.

Примѣръ 4. $c=24$; $\frac{c^2}{4}=2^4.3^2$. По фор. (II) имѣемъ $N=7$, т. е. семь раціональныхъ треугольниковъ. Дѣлители $\frac{c^2}{4}$, меньшіе $\frac{c}{2}$, суть 1,

2, 4, 8, 3, 6 и 9; полагая послѣдовательно $n_1=1$, 2, 4, 8, 3, 6 и 9 и слѣдовательно соотвѣтственно $m_1=144$, 72, 36, 18, 48, 24 и 16, по фор. (IV) получимъ: $a=145$ и $b=143$; $a=74$ и $b=70$; $a=40$ и $b=32$; $a=26$ и $b=10$; $a=51$ и $b=45$; $a=30$ и $b=18$; $a=25$ и $b=7$.

Д. Гика (Тверь).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Рефератъ о засѣданіи 27 января 1889 года Матем. Отд. Нов. Общ. Естеств. по вопросамъ элем. математики.

П. И. Злотчанскій сообщилъ проектъ учебника тригонометріи.

С. Ф. Афанасьевъ сдѣлалъ сообщеніе „о мнимыхъ числахъ", въ которомъ изложилъ ученіе о векторахъ и приложеніе его къ плоской тригонометріи.

Ѳ. Н. Милятицкій демонстрировалъ геліостатъ Пражмовскаго.

По поводу сообщенія П. И. Злотчанскаго и предложенія С. Ф. Афанасьева—подвергнуть разбору написанный имъ учебникъ тригонометріи и обсудить проектъ другого учебника тригонометріи, основаннаго на теоріи векторовъ, былъ поставленъ вопросъ, въ какомъ отношеніи находятся занятія собранія къ вопросу о составленіи учебниковъ. Послѣ обсужденія этого вопроса собраніе пришло къ слѣдующему рѣшенію. Авторъ, желающій подвергнуть разбору и обсужденію въ засѣданіяхъ собранія свой учебникъ, долженъ передать его на обсужденіе коммиссіи изъ нѣсколькихъ членовъ, наиболѣе интересующихся этимъ вопросомъ. Коммиссія будетъ подвергать обсужденію въ общемъ собраніи по своему усмотрѣнію различные вопросы, касающіеся учебника. Автору предоставляется право, пользуясь указаніями коммиссіи и общаго собранія измѣнять свой трудъ.

И. Слешинскій (Одесса).

♦ **Объ электрическомъ сопротивленіи ртути.** (*F. Kohlrausch.* Ann. d. Ph. u. Ch. 1888. № 12).

Въ названной статьѣ авторъ излагаетъ результаты своихъ изслѣдованій надъ сопротивленіемъ ртути, произведенныхъ по предложенію баварской академіи наукъ.—По опредѣленію автора

$$1 \text{ Омъ} = 1{,}0632 \text{ Сименса или } \frac{m}{qmm} \text{ ртути при } 0^\circ.$$

$$1 \text{ Сименсъ} = 0{,}9406 \text{ Ома}.$$

По просьбѣ автора проф. Glazebrook сравнилъ употребленную при опытахъ нормальную нейзильберовую проволоку съ единицей британской ассоціаціи въ Кембриджѣ и нашелъ, что

$$1 \text{ B.A.E.} = 1{,}0489 \text{ Сименса}.$$

Слѣдовательно, согласно измѣреніямъ Kohlrausch'а,

$$1 \text{ B.A.E.} = 0{,}9866 \text{ Ома}.$$

На основаніи полученныхъ результатовъ абсолютное удѣльное сопротивленіе единицы объема ртути будетъ

$$1\frac{cm}{qcm}\text{ ртути при }0°=94060\left[\frac{cm}{sec}\right]$$

В. З.

РЕЦЕНЗІИ.

П. А. Зиловъ. Краткій курсъ электричества и магнитизма. Варшава. 1889.

Это сочиненіе профессора Зилова, какъ и предыдущая его работа по теплотѣ, обладаетъ многими достоинствами: прежде всего слѣдуетъ указать на умѣніе автора въ немногихъ словахъ, но мѣтко очертить сущность явленія и основныя положенія. Авторъ не гонится за самостоятельностью выводовъ и доказательствъ: онъ просто приводитъ лучшія изъ существовавшихъ уже изложеній вопроса, всюду предпочитая простѣйшія и элементарныя доказательства болѣе сложнымъ. Благодаря этому, слишкомъ строгій математикъ, быть можетъ, нашелъ бы кое гдѣ мѣста не безупречныя въ математическомъ отношеніи (авторъ всюду уклоняется отъ повѣрки своихъ формулъ для случая безконечно малаго разстоянія взаимодѣйствующихъ полюсовъ, когда подъинтегральная функція принимаетъ неопредѣленный видъ). Весьма цѣнно то обстоятельство, что въ книгѣ кромѣ теоретическихъ разсужденій отведено нѣкоторое мѣсто и описанію существенныхъ опытовъ. Гипотетическая часть ученія объ электричествѣ совершенно исключена изъ книги. Книгу г. Зилова можно смѣло рекомендовать лицамъ, обладающимъ математическими познаніями немного высшими, чѣмъ даваемыя въ среднеучебныхъ заведеніяхъ; да и тѣ символы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, которые встрѣчаются въ разбираемой книгѣ, легко могли бы быть избѣгнуты, какъ это сдѣлалъ напр. проф. Шиллеръ въ своихъ статьяхъ объ электричествѣ, напечатанныхъ въ нашемъ журналѣ.

Литературѣ по электричеству у насъ посчастливилось: кромѣ множества книгъ описательнаго характера (соч. С. Томсона, О. Хвольсона, Тиндаля), мы имѣемъ весьма удовлетворительныя сочиненія, подвергающія ученія объ электричествѣ математической разработкѣ (Бріо, „Учебникъ механической теоріи теплоты", гдѣ 2-я часть содержитъ прекрасное математически строгое изложеніе теоріи электричества, Максуэлля „Электричество въ элементарной обработкѣ", разсматриваемую книгу г. Зилова и др.) Столь же, если не болѣе, посчастливилось отдѣлу о теплотѣ. Совсѣмъ нѣтъ ничего по оптикѣ. *А. Корольковъ* (Кіевъ).

Письмо въ редакцію.

М. Г., г. Редакторъ.

Въ № 61, (стр. 15, сем. VI) „Вѣстника" помѣщено письмо г. Соллертинскаго по поводу моей статьи объ именованныхъ величинахъ.

Это письмо для меня лично весьма цѣнное, хотя съ чисто субъективной точки зрѣнія, потому что оно еще разъ ясно показало мнѣ на сколько статья по затронутому мною вопросу необходима, и на сколько я былъ правъ, утверждая, что въ умноженіи иной разъ затрудняются не только ученики.

Въ самомъ дѣлѣ, г. Соллертинскій называетъ приведенные мною случаи умноженія степеней и радикаловъ „примѣрами *яко-бы* умноженія“ и говоритъ, что формула $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ „не относится къ умноженію, а къ извлеченію корня“.

Не возражая противъ этого мнѣнія, констатирую его какъ фактъ и указываю на его цѣну въ смыслѣ доказательства цѣлесообразности моей статьи.

Объ опредѣленіи умноженія, предлагаемомъ г. Соллертинскимъ, и смыслъ котораго заключается въ томъ, чтобы толковать всѣ случаи умноженія какъ сокращенное сложеніе, долженъ сказать, что къ нему приложимо все то же, что сказано мною объ обыкновенномъ общепринятомъ опредѣленіи. Да и самъ г. Соллертинскій не пытается изслѣдовать его примѣнимость къ разнымъ случаямъ и замѣчаетъ только, что „для насъ это безразлично“. Противъ такого „безразлично“ трудно возражать.

Не могу не высказать сожалѣнія, что г. Соллертинскій началъ возражать, не дождавшись окончанія статьи*); нѣкоторыя его сомнѣнія тогда, быть можетъ, видоизмѣнились бы. Онъ нашелъ бы еще окончательную оцѣнку вопроса, подкрѣпленную историческими доводами, а также дальнѣйшій разборъ задачи объ опредѣленіи площади прямоугольника.

Сказанное г. Соллертинскимъ объ опредѣленіи умноженія, которое дано мною въ п. 31, я къ сожалѣнію не понялъ,—но, повторяю, моя статья еще вернется къ этому вопросу.

Еще одно. Г. Соллертинскій съ первыхъ словъ говоритъ: „г. Мацонъ считаетъ себя въ правѣ“. Мнѣ кажется, что право автора высказать свое мнѣніе никому не интересный вопросъ, а потому едва ли удобно затрогивать его.

Въ заключеніе скажу, что если моя статья заставитъ опытныхъ преподавателей высказаться, то этимъ удовлетворится мое искреннее желаніе; и всякое слово, которое будетъ сказано, серьезно вникнувъ въ дѣло, на почвѣ знанія и опыта, будетъ встрѣчено мною съ полнымъ уваженіемъ. *Ѳ. Ю. Мацонъ.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Намъ пріятно сообщить читателямъ „Вѣстника“, что при Кіевскомъ Университетѣ св. Владиміра учреждается **„Кіевское Физико-Математическое Общество“**, имѣющее цѣлью способствовать развитію и распространенію физико-математическихъ наукъ, а также выработкѣ правильныхъ взглядовъ на преподаваніе этихъ наукъ въ учебныхъ заведеніяхъ. Уставъ Общества уже составленъ, и будетъ напечатанъ въ „Вѣстникѣ“ тотчасъ по его утвержденіи. По смыслу устава членами Общества (предлагаемыми однимъ изъ наличныхъ членовъ и избираемыми въ засѣданіяхъ закрытой баллотировкой) могутъ быть не только преподаватели физико-математическихъ наукъ, но и вообще любители, независимо отъ ихъ мѣста жительства. Членскій взносъ будетъ въ размѣрѣ 3 рублей въ годъ.

Сообщая заранѣе объ этомъ проектѣ Кіевскаго Физико-Математическаго Общества, мы надѣемся, что и между читателями „Вѣстника“ найдутся лица, которыя пожелаютъ войти въ составъ новаго Общества и своимъ просвѣщеннымъ сотрудничествомъ придать ему болѣе жизненности и интереса. *Ш.*

---

*) Продолженіе статьи будетъ въ № 63 „Вѣстника“.

ЗАДАЧИ.

№ 422. Даны крайнія точки одной діагонали гармоническаго четыреугольника и уголъ между прямыми, соединяющими эти точки съ серединою другой діагонали; найти геометрическое мѣсто каждаго изъ концовъ второй діагонали. Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

№ 423. Рѣшить систему уравненій

$$ax_1+bx_2=c_1$$
$$ax_2+bx_3=c_2$$
$$ax_3+bx_4=c_3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$ax_n+bx_1=c_n$$

П. Никульцевъ (Смоленскъ).

№ 424. Показать, что если высоты треугольника составляютъ ариѳметическую прогрессію, то стороны его составляютъ гармоническій рядъ и наоборотъ. *Н. Извольскій* (Тула).

№ 425. Дано

$$x+y+z=a$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2$$
$$x^3+y^3+z^3=c^3,$$

найти

$$x^4+y^4+z^4.$$

Н. Соболевскій (Москва).

№ 426. Въ кругъ радіуса R вписана трапеція такъ, что прямыя, проведенныя изъ концовъ основанія параллельно бокамъ, проходятъ черезъ центръ. Опредѣлить площадь трапеціи и показать, что сдѣлается съ центральнымъ угломъ, опирающимся на нижнее основаніе, зная величину a верхняго основанія. *А. Воиновъ* (Харьковъ).

№ 427. Сравнить величины радикаловъ

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \dots\dots,\ \sqrt[n]{n}.$$

М. Попруженко (Воронежъ).

№ 428. Глазъ наблюдателя, смотрящій на вертикальный предметъ AB, двигается по горизонтальной линіи DC, которая пересѣкаетъ продолженное направленіе AB въ точкѣ C. Найти наивыгоднѣйшее положеніе для глаза, т. е. такую точку D, чтобы уголъ ADB былъ maximum; $AC=a$ и $BC=b$. *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.).

№ 429. Построить гармоническій четыреугольникъ, когда даны двѣ діагонали его и уголъ между ними. Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

Упражненія для учениковъ.

1) Если дробь $\frac{84}{x}$ разложить въ непрерывную, то числитель предпослѣдней подходящей дроби (послѣднею подходящею дробью будетъ сама разлагаемая дробь) будетъ равенъ 25. Опредѣлить x.

2) Если правильную дробь $\frac{x}{157}$ разложить въ непрерывную, то знаменатель предпослѣдней подходящей дроби будетъ равенъ 30. Опредѣлить x.

3) Найти значеніе непрерывной дроби

$$2+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots\ldots\ldots}}}}}}$$

если извѣстно, что разность между пятой и четвертой подходящими къ ней дробями равна $\frac{-1}{697}$ (a, b, c и d—цѣлыя и положительныя искомыя числа).

4) Въ непрерывной дроби извѣстны: первая подходящая дробь и разность между послѣднею (всею дробью) и предпослѣднею. Найти эту непрерывную дробь.

Каковъ долженъ быть знаменатель разности между послѣднею и и предпослѣднею подходящими дробями, чтобы задача эта имѣла одно рѣшеніе?

5) Найти значеніе непрерывной дроби

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots\ldots}}}}}$$

если извѣстно, что разность между обратными значеніями пятой и четвертой подходящихъ дробей равняется $\frac{1}{656}$ (a, b, c и d—цѣлыя и положительныя искомыя числа).

6) Въ непрерывной дроби извѣстна разность между обратными значеніями послѣдней и предпослѣдней подходящихъ дробей. Найти эту непрерывную дробь.

Каковъ долженъ быть знаменатель данной разности, чтобы задача имѣла одно рѣшеніе.

7) Какъ измѣнить условія 4-ой и 6-ой задачъ въ случаѣ, когда непрерывная дробь будетъ безконечная періодическая?

8) Если дробь $\frac{x}{16}$ разложить въ непрерывную, то числитель предпослѣдней подходящей дроби будетъ равенъ 18. Опредѣлить x.

Каковы должны быть данныя числа, чтобы подобная задача имѣла одно рѣшеніе?

9) Если дробь $\frac{48}{x}$ разложить въ непрерывную, то знаменатель предпослѣдней подходящей дроби будетъ равенъ 18. Опредѣлить x.

Каковы должны быть данныя числа, чтобы подобная задача имѣла одно рѣшеніе?

10) Составить задачи подобныя 8 и 9 для случая, когда непрерывная дробь есть безконечная періодическая. *К. Тороповъ* (Пермь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 275. Опредѣлить сумму n членовъ ряда:

$$(n+1)n+2n(n-1)+3(n-1)(n-2)+4(n-1)(n-3)+\ .\ .\ .\ .\ +n.2.1$$

Общій i-тый членъ этого ряда будетъ

$$i\left[n-(i-2)\right]\left[n-(i-1)\right]=i^3+(2n+3)i^2+(n+1)(n+2)i,$$

слѣдовательно искомая сумма

$$S=S_3+(2n+3)S_2+(n+1)(n+2)S_1\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

гдѣ S_3 есть сумма кубовъ натуральныхъ чиселъ, S_2—сумма квадратовъ ихъ и S_1 сумма первыхъ степеней. Такъ какъ

$$S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3},\ S_1=\frac{n(n+1)}{2},$$

то, замѣняя въ (1) S_3, S_2 и S_1 ихъ величинами, найдемъ въ концѣ концовъ

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}.$$

Н. Артемьевъ (Спб.). Ученикъ: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 299. Имѣются два ртутные термометра. Вмѣстимость резервуара перваго при одинаковыхъ условіяхъ втрое меньше, а высота столбика

ртути при нагрѣваніи на одно и то же число градусовъ—въ $^3/_4$ раза меньше, чѣмъ во второмъ термометрѣ. Найти отношеніе діаметровъ трубокъ.

Пусть v_1 и v_2 будутъ объемы резервуаровъ, d_1 и d_2—діаметры трубокъ, h_1 и h_2 высоты столбиковъ ртути. Тогда объемы ртути въ трубкахъ, при одинаковой температурѣ, выразятся такъ:

$$\frac{\pi d_1^2 h_1}{4}=\frac{v_1}{n}, \quad \frac{\pi d_2^2 h_2}{4}=\frac{v_2}{n}.$$

Такъ какъ $v_2=3v_1$

$$\frac{\pi d_2^2 h_2}{4}=\frac{3\pi d_1^2 h_1}{4}.$$

Отсюда:

$$\frac{d_2}{d_1}=\sqrt{\frac{3h_1}{h_2}}$$

Но по условію, $\frac{h_1}{h_2}=\frac{4}{3}$, слѣдовательно:

$$\frac{d_2}{d_1}=2$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва).

№ 303. Два лица А и В, вложившія въ торговыя предпріятія равные капиталы, продали гуртъ воловъ, получивъ при этомъ за каждаго вола столько рублей, сколько воловъ было въ гуртѣ. Всѣ вырученныя деньги были истрачены на покупку стада овецъ, по 10 рублей за штуку и одного ягненка. При дѣлежѣ А получилъ лишнюю овцу, вслѣдствіе чего ему пришлось отдать В ягненка и небольшую сумму денегъ въ видѣ приплаты. Какъ велика была эта сумма, которую В получилъ наличными.

Обозначивъ число проданныхъ воловъ чрезъ m, число купленныхъ овецъ чрезъ n и цѣну ягненка чрезъ p, въ рубляхъ, получимъ

$$m^2=10n+p,$$

гдѣ m, n и p суть числа цѣлыя; $p<10$, а n число нечетное по смыслу задачи. Если число десятковъ въ квадратѣ нѣкотораго цѣлаго числа нечетно, то число единицъ этого квадрата равно 6. Дѣйствительно, при возведеніи цѣлаго числа въ квадратъ десятки могутъ получиться 1) въ удвоенномъ произведеніи десятковъ на единицы и 2) въ квадратѣ единицъ. Первое, если не равно нулю, всегда заключаетъ четное число десятковъ; слѣд. въ квадратѣ числа тогда только будетъ нечетное число десятковъ, когда ихъ заключается нечетное число въ квадратѣ единицъ. Этому условію удовлетворяютъ два однозначныхъ числа 4 и 6. При этомъ, имѣетъ

ли число въ разрядѣ единицъ 4 или 6, квадратъ его будетъ оканчиваться шестью. Итакъ $p=6$. Стоимость ягненка 6 руб. Приплата 4 руб.

М. (Владимiръ) *М. Л.* (Архангельскъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва). Ученикъ: Кишиневск. р. уч. (7) *Д. Л.*

№ 306. Имѣемъ треугольникъ $A_1B_1C_1$. Построимъ треугольникъ $A_2B_2C_2$, вершины котораго суть средины сторонъ даннаго, потомъ строимъ треугольникъ $A_3B_3C_3$, вершины котораго суть средины сторонъ треугольника $A_2B_2C_2$ и т. д. Вершины послѣдняго треугольника $A_n\ B_n\ C_n$ суть средины сторонъ предпослѣдняго треугольника $A_{n-1}\ B_{n-1}\ C_{n-1}$. Опредѣлить точку, которая остается всегда внутри послѣдняго треугольника, хотя бы число n было какъ угодно велико.

Вписавъ $\triangle A_2B_2C_2$ въ $\triangle A_1B_1C_1$, проведемъ медiану A_1A_2, тогда

$$\triangle A_1A_2B_1 \backsim \triangle A_1A_3C_2 \text{ и } \triangle A_1A_2C_1 \backsim \triangle A_1A_3B_2;$$

поэтому

$$C_2A_3 : B_1A_2 = A_1A_3 : A_1A_2 = A_3B_2 : A_2C_1,$$

но такъ какъ

$$B_1A_2 = A_2C_1,$$

то и

$$C_2A_3 = A_3B_2,$$

т. е. точка A_3 есть средина стороны B_2C_2 въ $\triangle A_2B_2C_2$, а линiя A_2A_3 есть медiана въ томъ же $\triangle$—кѣ. Точно также можно доказать, что отрѣзокъ той же линiи A_1A_2 будетъ медiаной въ $\triangle$—кѣ $A_3B_3C_3$ и вообще во всякомъ $\triangle A_n\ B_n\ C_n$, построенномъ описаннымъ въ условiи задачи способомъ. Прилагая точно такое же разсужденiе къ медiанамъ B_1B_2 и C_1C_2, можно доказать, что всѣ медiаны $\triangle A_1B_1C_1$ будутъ медiанами во всякомъ $\triangle A_n\ B_n\ C_n$; а такъ какъ точка пересѣченiя медiанъ всегда, во всякомъ треугольникѣ, лежитъ внутри его, то значитъ эта точка и есть искомая. Не трудно доказать, что эта точка будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ центромъ тяжести $\triangle A_1B_1C_1$, а также всякаго $\triangle A_n\ B_n\ C_n$.

М. (Владимiр.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва). Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскiй.

Дозволено цензурою. Кiевъ, 1 Марта 1889 г.
Типо-литографiя Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.